OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALA
18.02.2012
Clasa a VII-a

Subiectul I

Fie $A=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\ldots+\frac{\sqrt{2012}-\sqrt{2011}}{\sqrt{2011\cdot 2012}}$

a) Demonstrați că 0<A<1.

b) Aratati ca 43< $\sqrt{2012}\cdot$ A.< 44.

Subiectul II

a) Fie $a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$ astfel încât $\frac{a}{2b+3c}=\frac{2b}{a+3c}=\frac{3c}{a+2b}$.

Determinați valoarea expresiei : $(a+b+c)^{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$ considerând exponentul în $\mathbb{N}^*$.

b) Arătați că fracția $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)+1}$ este ireductibilă pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Subiectul III

Se da triunghiul ABC in care (BB' si (CC' sunt bisectoarele unghiurilor ABC, respectiv ACB cu $B'\in AC$ si $C'\in AB$. Bisectoarea unghiului BIC intersecteaza pe BC in punctul D, iar $\{I\}=BB'\cap CC'$. Aratati ca triunghiul B'C'D este echilateral daca si numai daca $m(\angle BCA)=60^0$

Subiectul IV

Se considera tapezul ABCD (AB$\parallel CD$). Notam cu P intersectia bisectoarelor unghiurilor A si D, iar cu Q intersectia bisectoarelor unghiurior B si C.

a) Aratati ca punctele P, Q si mijloacele laturilor AD, respectiv BC sunt coliniare;

b) Punctele P si Q sunt puncte identice daca si numai daca AD+BC=AB+DC.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se evaluează cu 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

Probleme propuse şi selectate de prof. Gînța Vasile, prof. Niculescu Carmen, prof. Sebestyén Mária